

# Mechanikai fogalmak, definíciók, tételek

Összeállította: dr. Uj József docens

## Szilárdságtan

A Szilárdságtan a deformálható szilárd testekben (elsősorban a rudakban) fellépő belső erőket (feszültségeket) vizsgálja, továbbá meghatározza a rudak terhelés hatására létrejövő rugalmas alakváltozásait, valamint módszert ad a rudak szilárdsági méretezésére vagy ellenőrzésére.

**Deformálható test:** az anyagi részecskéi terhelés hatására egymáshoz képest elmozdulnak, a test alakja megváltozik.

**Rugalmas alakváltozás:** a terhelt testről a terhelést levéve visszanyeri az eredeti alakját.

**Lineárisan rugalmas alakváltozás:** a test alakváltozása és a terhelő erőhatás lineáris kapcsolatban van.

**Homogén anyag:** a mechanikai tulajdonságai a test minden pontjában ugyanazok, nem helyfüggő a viselkedése.

**Izotrop anyag:** a mechanikai tulajdonságai minden irányban ugyanazok, nem irányfüggő a viselkedése.

**Feszültségvektor:** a terhelt testek belső felületein fellépő belső erők intenzitás vektora (felületegységre eső erő). Mértékegysége: Pa.  $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$ ,  $1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ N/m}^2$ ,  $1 \text{ GPa} = 10^9 \text{ N/m}^2$

**Normál feszültség:** a feszültségvektor felületre merőleges komponense. Pozitív előjelű, ha a test anyagából kifelé néz az irány.

**Csúsztató feszültség:** a feszültségvektor felülettel párhuzamos komponense.

**Fajlagos nyúlás:** egy test egy pontja környezetében, adott irányban kijelölt elemi vonalszakasz hosszának fajlagos (eredeti hosszra vonatkoztatott) megváltozása (azaz a hosszváltozás osztva az eredeti hosszával). Dimenziótlan mennyiség.

**Szögváltozás:** egy test egy pontjában, egy adott irány és a rá merőleges irány szögének megváltozása a terhelés hatására, radiánban mérve. Dimenziótlan mennyiség.

**Folyáshatár:** az a feszültség, amelynél a húzás hatására megindul az anyag képlékeny alakváltozása. Mértékegysége Pa.

**Szakító szilárdság:** az a legnagyobb feszültség, amely a húzott rúd szakadása előtt fellép. Mértékegysége Pa.

**Megengedett feszültség:** az a legnagyobb feszültség, amit egy rúdban a működése során még megengedünk. Szívós anyagokra ez általában a folyáshatár osztva a biztonsági tényezővel. Rideg anyagokra a szakító szilárdság osztva a biztonsági tényezővel.

**Biztonsági tényező:** az a szám, amely megmutatja, hogy a méretezési határfeszültség (folyáshatár, vagy szakító szilárdság) hányszorosa a megengedett feszültségnek.

**Tényleges biztonsági tényező:** az a szám, amely megmutatja, hogy a méretezési határfeszültség (folyáshatár, vagy szakító szilárdság) hányszorosa a rúdban egy adott terhelésre ténylegesen fellépő legnagyobb feszültségnek.

## Húzott/nyomott rúd

**A rúdban fellépő feszültségek:** a keresztmetszet síkján csak normálfeszültség lép fel, egyenletesen oszlik meg a felületen. *Nagysága:* rúderő osztva a keresztmetszet területével. Húzásra pozitív, nyomásra negatív a normálfeszültség.

**A rúd alakváltozása:** hosszirányú fajlagos nyúlás minden pontban állandó, értéke: hosszváltozás osztva az eredeti hosszal. A keresztirányú fajlagos nyúlás ezzel

# Mechanikai fogalmak, definíciók, tételek

Összeállította: dr. Uj József docens

## Statika

A Statika a tartósan nyugalomban lévő merev testekre ható erőket, valamint a nyugalom feltételeit vizsgálja.

**Merev test:** anyagi részecskéi egymáshoz képest nem mozdulnak az erők hatására. A merev test alakja nem változik, bármilyen erő hat rá. Egy test akkor tekinthető merevnek, ha részecskéinek egymáshoz viszonyított elmozdulásai elhanyagolhatóan kicsik a test méreteihez képest.

**Anyagi pont:** a kiterjedés nélküli test. Egy test akkor tekinthető anyagi pontnak, ha a kiterjedése elhanyagolhatóan kicsi a vizsgált környezethez képest.

**Erő:** a testek mechanikai kölcsönhatása, a testek egymásra gyakorolt hatása. Az erőhatás megoszolhat a testek térfogatán, a testek felületén, egy vonal mentén.

**Koncentrált erő:** az elhanyagolhatóan kicsi térfogaton vagy felületen ható erő, amely egyetlen vektorral írható le. Az erő a hatásvonalához kötött vektor.

**Terhelés:** a tartóra ható ismert erők összessége (aktív erők).

**Nyomaték egy pontra:** egy erő nyomatéka egy pontra egy vektor, amelyet úgy számíthatunk, hogy a pontból helyvektort indítunk az erő hatásvonalán lévő tetszőleges pontba és ezt vektorikusan összeszorozzuk az erő vektorral. Egy pontra számított nyomatékvektor három komponense (a koordinátatengelyek irányába eső) a ponton átmenő, a koordinátatengelyekkel párhuzamos tengelyekre számított nyomatékok. Az erő nyomatéka nulla a hatásvonalán lévő pontra.

**Nyomaték egy tengelyre:** egy erő nyomatékát egy tengelyre megkapjuk, ha a tengely egy tetszőleges pontjára számítjuk a nyomatékát, majd vesszük a nyomatékvektor tengely-irányú vetületét, vagyis a nyomatékvektort skalárisan szorozzuk a tengely egységvektorával. Egy erő nyomatéka nulla a hatásvonalát metsző, vagy a vele párhuzamos tengelyre. Egy tengelyre a nyomaték vektorikus szorzás nélkül is kiszámítható: az erőt a hatásvonalán lévő tetszőleges pontban felbontjuk a tengellyel párhuzamos és egy erre merőleges összetevőre. A párhuzamos összetevő nyomatéka nulla, míg a merőleges összetevő szorozva az összetevő és a tengely közötti merőleges távolsággal eredményezi a tengelyre számított nyomatékot.

**Két vektor vektorikus szorzata:** egy harmadik vektor, amelynek iránya merőleges a két vektor síkjára, nagysága pedig egyenlő a két vektor által alkotott paralelogramma területével. A tényezők sorrendjét felcserélve az eredmény előjelet vált. Két párhuzamos vektor vektorszorzata nulla vektor!

**Egységvektorok vektorszorzatai:**  $i \times j = k$ ,  $j \times k = i$ ,  $k \times i = j$ ,  $j \times i = -k$ ,  $k \times j = -i$ ,  $i \times k = -j$ ,  $i \times i = 0$ ,  $j \times j = 0$ ,  $k \times k = 0$ .

**Két vektor skalárszorzata:** egy skalár szám amely egyenlő a két vektor nagyságának és a vektorok által közbezárt szög koszinuszának a szorzatával. Két merőleges vektor skalárszorzata nulla! Ha az egyik vektor egységvektor, akkor a skalárszorzat a másik vektor vetületi hosszát adja az egységvektor irányában.

**Tengely:** irányított egyenes. Megadása: az egyenes egy pontjával és az irányát kijelölő egységvektorral.

**Egy ponton átmenő erőrendszer eredője:** egyetlen erő, amely az erők vektorikus összege. Ez az erő is átmegy az adott ponton.

**Két erőrendszer egyenértékű,** ha az alkotó erők összegei (eredői) egyenlőek és ha a nyomatékuk azonos a tér bármely pontjára. Ha egy pontra már azonos a nyomatékuk, minden más pontra is azonos.

**Eredő (redukált) vektorkettős:** egy erőrendszer egy P-pontbeli eredő vagy redukált vektorkettőse áll az erőrendszert alkotó erők vektorikus összegéből és az erőrendszer P-re számított nyomatékvektorából. A P-beli vektorkettős egyenértékű az erőrendszerrel.

**Erőpár:** két erő által alkotott erőrendszer, amelyre fennáll, hogy az erők azonos nagyságúak, hatásvonalaik párhuzamosak, és ellentétes az erők előjele. Az erőpár nyomatéka a tér bármely pontjára ugyanakkora. Egy erőpár egyenértékű a nyomatékvektorával.

**Erőrendszerek osztályai:** Bármely térbeli erőrendszer az alábbi 4 eset egyikébe tartozik:

- egyensúlyi erőrendszer,
- egy erőpárral egyenértékű,
- egy erővel egyenértékű,
- egy erőcsavarral egyenértékű.

Síkbeli erőrendszer csak az első három csoport egyikébe tartozhat.

**Erőcsavar:** olyan eredő vektorkettős, amelyben a nyomatékvektor párhuzamos az eredő erővel.

**Centrális egyenes:** az egy erővel egyenértékű erőrendszerekre létezik, a centrális egyenes pontjaira az erőrendszer nyomatéka nulla. Az ilyen erőrendszer egyenértékű egyetlen, a centrális egyenesbe eső erővel. A centrális egyenes irányát az eredő erő adja.

**Síkbeli erőrendszer:** egy adott síkba eső erőkből és erőpárokból áll.

**Rúd:** olyan test, amelynek két irányban a mérete sokkal kisebb, mint a harmadik irányban (hossz-irány). A rúd hosszra merőleges metszete a keresztmetszet.

**Egyenes tartó:** olyan egyenes rúd, amelyet a rúdra merőleges erők is terhelnek

**Csuklós szerkezet:** csuklókkal összekötött rudakból áll, a szerkezet kényszerekkel kapcsolt a környezethez

**Rácsos szerkezet:** egyenes rudakból álló szerkezet, melynek rúdjai a végeiken csuklókkal kapcsolódnak egymáshoz, csak koncentrált erők terhelik, amelyek a csuklópontokban hatnak, a környezethez is a csuklókon keresztül kapcsolódnak. A rácsos szerkezet bármelyik rúdja két erő hatására van nyugalomban, a rúdban csak húzó/nyomó erő ébredhet.

**Kényszer:** a rudakat egymáshoz és a környezethez kapcsoló, a rudak mozgását korlátozó szerkezet mechanikai modellje. Gyakori kényszerek: csukló (síkbeli), gömbcsukló (térbeli csukló), befogás (befalazás), sima görgős támasz.

**Kötöttség:** a kényszerek által elvont mozgáslehetőségek száma. A síkbeli csukló kötöttsége 2, a térbeli csuklóé 3, a befogás kötöttsége síbéli tartóra 3, térbelire 6, a sima görgős támasz kötöttsége 1.

**Szabadságfok:** egy test helyzetét egyértelműen meghatározó skalár paraméterek száma. Másképpen: a test mozgás-lehetőségeinek a száma.

**Anyagi pont szabadságfoka:** síkban 2 (elmozdulás két irányban), térben 3 (elmozdulás három irányban).

**Merev test szabadságfoka:** síkban 3 ( egy pontjának két irányú elmozdulása és a test szögelfordulása a síkra merőleges tengely körül), térben 6 ( egy pontjának 3 irányú elmozdulása és a test szögelfordulása 3 tengely körül).

**Reakció erő (kényszererő):** a tartó külső kényszerein keresztül a tartóra átadódó erő. A kényszererő függ a kényszer típusától és a terheléstől (aktív erőktől). A kényszererőrendszer komponenseinek száma megegyezik az adott kényszer kötöttségi számával.

**Keret, keretszerkezet:** különféle irányban futó, egymáshoz mereven kapcsolt rudakból álló szerkezet. A zárt keret rúdjai zárt láncot alkotnak.

**Labilis szerkezet:** olyan csuklós szerkezet, amelynek rúdjai egymáshoz képest elmozdulhatnak. Egy adott terhelésre a rudak csak egy meghatározott helyzete mellett lehet nyugalomban.

### **A statika alapelvei:**

- ❑ Minden test megtartja nyugalmi állapotát, amíg rá egyensúlyi erők hatnak (Newton I. axiómája)
- ❑ Ha egy testre egy másik test erőt fejt ki, akkor a másik testre ugyanolyan nagyságú, de ellentétes irányú erő hat (Newton III. axiómája, hatás-ellenhatás elve, kölcsönhatás törvénye)
- ❑ Ha egy testre több erő hat, együttes hatásuk azonos az erők eredőjének hatásával. A testre egyidejűleg ható egymást nem befolyásolják, hatásaik összeadódnak (Newton IV. axiómája, erőhatások függetlenségének elve, szuperpozíció elve).

- Két erő akkor és csakis akkor van egyensúlyban, ha
  - közös a hatásvonaluk,
  - azonos a nagyságuk és
  - ellentétes az értelmük.
  
- A merev test nyugalmi állapota nem változik meg, ha a rá ható egyensúlyi erőkhez hozzáadunk egy önmagában egyensúlyi erőrendszert. Ennek következménye, hogy az erő a hatásvonalán eltolható, a hatása nem változik.

### A statika alaptörvénye:

- Egy erőrendszer akkor egyensúlyi, ha
- eredője nulla, és ha
  - nyomatéka a tér bármely pontjára nulla.

### Három erő egyensúlyának feltételei:

- a három erő egy közös síkba esik,
- egy pontban metszik egymást,
- vektorikus összegük nulla.

**Részekre bontás módszere:** összetett szerkezetek egyensúlya esetén alkalmazzuk. Alapja: ha az összetett rendszer nyugalomban van, akkor bármely része is nyugalomban van, ezért bármely részére egyensúlyi erőrendszer működik.

**Belső erők:** az összetett szerkezet egyes részei között fellépő erők, az egyik rész hatása a másikra és viszont. A belső erők önmagukban egyensúlyi erőrendszert alkotnak.

**Rudak igénybevételei:** a rudak keresztmetszeti síkjain ébredő *belső* erők eredői. A keresztmetszeti síkokon ébredő belső erők felületen megoszló erők, ezek a feszültségek. A belső erőket redukálva a keresztmetszet súlypontjába, kapunk egy erő- és egy nyomatékvektort. Az erővektor két komponense: a keresztmetszeti síkra merőlegesen a *húzó/nyomó* erő (rúderő), a síkkal párhuzamosan a *nyíróerő*. A nyomatékvektor két komponense: a keresztmetszeti síkra merőlegesen a *csavarónyomaték*, a síkkal párhuzamosan a *hajlítónyomaték*. A keresztmetszet két oldalán lévő belső erők önmagukban egyensúlyi erőrendszert alkotnak.

**Az igénybevételek számítása:** a rúdra ható külső erőkből. A rúd egy keresztmetszetének egyik oldalán az igénybevételeket megkapjuk, ha a rudat a keresztmetszet mentén gondolatban kettévágjuk, és a rúd másik részére működő külső erőket redukáljuk a keresztmetszet súlypontjába, majd meghatározzuk az eredő erő és nyomaték síkba eső és merőleges komponenseit.

**Igénybevételi ábrák:** az egyes igénybevételek (rúderő, nyíróerő, hajlítónyomaték, csavarónyomaték) grafikus ábrázolása a rúd hossza mentén.

**Igénybevételi függvények:** az egyes igénybevételek (rúderő, nyíróerő, hajlítónyomaték, csavarónyomaték) függését fejezi ki a rúd hossza mentén felvett változótól.

ellentétes előjelű, értéke konstanssal való szorzással számítható. Ez a Poisson-tényező (a rugalmas viselkedés egyik paramétere).

**Egyszerű Hooke-törvény:** a lineárisan rugalmas húzott rúdban a keresztmetszet síkján ébredő normálfeszültség arányos a hosszirányú fajlagos nyúlással. Az arányossági tényező a rugalmassági modulus (a rugalmas viselkedés másik paramétere). A rugalmassági modulus mértékegysége Pa.

## Hajlított rúd

**Tiszta hajlítás:** a rúdnak csak hajlító igénybevétele van.

**A hajlítás tengelye:** a keresztmetszet súlypontján átmenő hajlító-nyomaték vektor iránya jelöli ki.

**A rúdban fellépő feszültségek:** a keresztmetszet síkján csak normálfeszültség lép fel, megoszlása lineárisan változik a felületen. A zérus feszültségű pontok alkotják a semleges réteget, ez átmegy a keresztmetszet súlypontján. *Nagysága:* hajlító-nyomaték osztva a keresztmetszet másodrendű nyomatékával és szorozva a semleges rétegtől mért távolsággal. A legnagyobb feszültség a semleges rétegtől legtávolabb lévő keresztmetszeti pontban lép fel.

**A rúd alakváltozása:** a pozitív hajlító nyomatéokra a rúd semleges réteg feletti pontjaiban pozitív a hosszirányú fajlagos nyúlás, a semleges rétegben nulla, alatta pedig negatív (rövidülés). A semleges rétegre merőleges egyenes mentén lineárisan változik a hosszirányú fajlagos nyúlás. A keresztirányú fajlagos nyúlás ezzel ellentétes előjelű, értéke Poisson-tényezővel való szorzással számítható.

**A semleges réteg görbülete:** egyenesen arányos a hajlító-nyomatékkal és fordítva arányos a keresztmetszet másodrendű nyomatéka és a rugalmassági modulus szorzatával.

**A keresztmetszet másodrendű nyomatéka (inercia):** a keresztmetszet geometriai jellemzője a hajlításkor. A keresztmetszet elemi felületdarabjait a hajlítás tengelyétől mért távolságaik négyzetével szorozzuk és integráljuk a teljes felületre.

**Keresztmetszeti tényező:** a másodrendű nyomaték osztva a hajlítás tengelyétől legtávolabb lévő pont távolságával.

**Veszélyes keresztmetszet:** az, amelyikben a hajlító nyomaték a legnagyobb abszolút értékű.

**Veszélyes pont:** a veszélyes keresztmetszetben az a pont, amelyikben a legnagyobb abszolút értékű normál feszültség ébred, vagyis a hajlítás tengelyétől legtávolabbra lévő pont(ok).

## Nyírás rudakban

**A rúdban fellépő feszültségek:** a keresztmetszet síkján a nyírás hatására csak csúsztató feszültség lép fel. Átlagos értéke a keresztmetszeten a nyíróerő/keresztmetszeti terület, téglalap keresztmetszet esetén a maximuma ennek 1.5-szerese. Maximális értéket a semleges réteg pontjaiban vesz fel. Mivel csak a hajlítással együtt lép fel, hajlításból normálfeszültség származik a keresztmetszet síkján.

**Szilárdsági ellenőrzés/méretezés:** a nyírásból származó feszültségek általában elhanyagolhatók, elegendő csak a hajlítást figyelembe venni.

## Kör- és körgyűrű keresztmetszetű rúd csavarása

**A rúdban fellépő feszültségek:** a keresztmetszet síkján csak csúsztató feszültség lép fel, megoszlása lineárisan változik a keresztmetszet súlypontjából indulva a sugár

mentén. *Íránya* bármely pontban merőleges a sugárra, azaz érintő irányú. *Nagysága*: a csavaró nyomaték osztva a keresztmetszet poláris másodrendű nyomatékával és szorozva a súlyponttól mért távolsággal. A legnagyobb feszültség a külső kör pontjaiban lép fel.

**A rúd alakváltozása:** a rúd keresztmetszetei egymáshoz képest elfordulnak, az elcsavarodás a hossz mentén lineárisan változó. A rúd hossza és keresztmetszeti méretei nem változnak.

**Fajlagos szögelfordulás (elcsavarodás):** egyenesen arányos a csavaró nyomatékkal, fordítva arányos a keresztmetszet poláris másodrendű nyomatékával és a csúsztató rugalmassági modulussal.

**Megengedett csúsztató feszültség:** kisebb, mint a megengedett normál feszültség: a Mohr-elméletet alkalmazva csak fele akkora, míg a Mises-elmélet (HMH-elmélet) szerint  $1/\sqrt{3}$ -szorosa.

## Centrikusan nyomott rudak kihajlása

**Centrikus nyomás:** a nyomóerő a rúd keresztmetszete súlypontján megy át

**Kihajlás:** stabilitásvesztési jelenség, a centrikusan nyomott egyenes rúd egy bizonyos nyomó erőre (kritikus erő) kihajolhat, alakja meggörbülhet.

**Rugalmas kihajlás:** a kihajlás rugalmas alakváltozás mellett következik be, ez a karcsú rudakra jellemző

**Képlékeny kihajlás:** a kihajlás képlékeny alakváltozás mellett következik be, ez a zömök rudakra jellemző

**Kritikus erő:** Az a legkisebb nyomóerő, amelyre a kihajlás bekövetkezhet.

**Kritikus feszültség:** Az a legkisebb abszolút értékű negatív normál feszültség a nyomott rúdban, amelyre a kihajlás bekövetkezhet.

**Karcsúsági tényező:** a centrikusan nyomott rúd jellemzője. Egyenesen arányos a rúd kihajlási fél hullám hosszával és fordítva a keresztmetszet minimális inercia sugarával. Dimenzió nélküli szám.

**Inercia sugár:** a rúd keresztmetszeti jellemzője. A keresztmetszet másodrendű nyomatéka az egy súlyponti tengelyre, osztva a keresztmetszet területével és ebből négyzetgyököt vonunk.

**Kihajlási fél hullámhossz:** a kihajlott rúd fél szinusz-hullámot képező hossza. Értéke függ a rúd tényleges hosszától és a rúd kényszereitől.

## Feszültségi állapot

**Feszültségi állapot:** a test egy pontjában a ponton átmenő belső felületeken (síkokon) fellépő feszültségek összessége.

**Főfeszültségek, feszültségi főirányok:** bármilyen feszültségi állapot esetén létezik 3, egymásra kölcsönösen merőleges sík, amely síkokon nem ébred csúsztató feszültség, vagyis csak normál feszültség ébred. Ezek a főfeszültségek, a síkok normálisai a feszültségi főirányok.

**Mohr-féle feszültségi kördiagram:** a test egy pontjában a feszültségi állapotot írja le, a ponton átmenő síkokon fellépő csúsztató feszültségek abszolút értékét ábrázoljuk

a normál feszültség függvényében. Minden irányhoz (síkhöz) egy pont tartozik a diagrammban. A főirányok pontjai a vízszintes tengelyen vannak. A főfeszültségi síkokba eső irányok pontjai rendezetten egy-egy félkört alkotnak. Egy általános irány feszültségi pontja a körív-háromszög belsejében van.

**Egyenértékű feszültség:** annak mértéke, hogy egy adott feszültségi állapot törés tönkremenetel szempontjából milyen szinten van. Pozitív szám, feszültség dimenziójú. Mohr-elmélet szerint az egyenértékű feszültség az adott pontban fellépő legnagyobb csúsztató feszültség kétszerese. Mises-elmélet (Huber-Mises-Hencky) szerint az alaktorzulási energia sűrűség bizonyos szintjét jellemzi, a három főfeszültség különbsége négyzetösszegének feléből vont négyzetgyök.